Les Nombres Premiers

KATEMBERA A. David

Sommaire

Avant-Propos

Beaucoup de gens sont fascinés par les nombres, les mathématiques et ses applications dans multiples domaines. C'est très évident de nos jours que les mathématiques s'imposent comme un art majeur dont l'évolution entraine également des découvertes considérables dans d'autres sciences. Des sciences économiques à la statistique en passant par la physique, la chimie, la biologie, l'informatique, la sociologie etc., les mathématiques sont là. *Et les nombres* ? C'est aux nombres que l'on pense immédiatement lorsqu'on parle des mathématiques. Nous avons dans ce papier voulu nous intéresser aux plus particuliers d'entre eux : *les nombres premiers.* Nous nous sommes attardés sur certains éléments très pratiques que mêmes les non mathématiciens peuvent facilement saisir dans la lecture. L'idée ayant poussé à la rédaction de ce papier et d'attirer l'attention du lecteur sur la *particularité* des nombres premiers et surtout sur la *non résolution* jusqu'alors de leur énigme qui laisse les scientifiques perplexe.

KATEMBERA A. David

Etudiant à l'Université de Kinshasa, à la Faculté des Sciences, au Département des Mathématiques et Informatique

davekatembera@yahoo.fr

LES NOMBRES PREMIERS

1. Définition :

En mathématique, on appelle nombre premier, tout entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par lui-même et par *1*. C'est donc un nombre naturel *incassable* par la division.

➢ **Remarques :**

- L'entier 2 est le seul nombre premier pair ;
- L'entier 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur entier positif, lui-même ;
- L'entier 0 n'est pas premier car il est divisible par tous les entiers positifs.

Depuis toujours, la compréhension des nombres premiers constitue un mystère pour les mathématiciens car leur distribution semble ne pas obéir à une suite logique – ces derniers apparaissent comme de façon *aléatoire*[1]. Seulement, les lois mêmes de probabilité n'expliquent aucunement leur distribution. Telles les étoiles dans le ciel, les nombres premiers se tiennent les uns aux côtés des autres à des distances jusque-là complètement inexplicables, comme on peut bien le constater dans la liste ci-dessous donnée, des nombres inférieurs ou égal à *100* où les marqués sont premiers.

Les nombres premiers compris entre 1 et 100 par le ***Crible d'Eratosthène***

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Méthode : Crible d'Eratosthène

On écrit la liste des n premiers entiers naturels non nuls, on élimine 1, les multiples de 2, puis les multiples de 3, etc. jusqu'aux multiples du plus grand entier inférieur à $\sqrt{n}$

➢ **L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premier est infini**

[1] *Aléatoire* **: qui est soumis au hasard(exemple : phénomène aléatoire : phénomène dont l'issu est soumis au hasard.)**

La proposition ci-haut peut être démontrée par *l'absurde*[2] de la manière suivante :

Démonstration :

Supposons l'existence d'un nombre fini m de nombres premiers, noté $p_1 \ldots p_m$. Posons alors $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m + 1$. L'entier N admet au moins un diviseur premier que nous noterons p. Par hypothèse, il existe $i \leq m$ tel que $p = p_i$. Ainsi, p_i divise N et $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m$, donc p divise également $N - p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m = 1$, donc $p_i = 1$, ce qui est absurde car 1 n'est pas un nombre premier. Ainsi on a démontré.

Cette démonstration a pu être établie parce qu'il existe un théorème sur les entiers naturels qui dit que : ***Tout entier naturel n ≥ 2 admet au moins un diviseur premier.***

- **Le lecteur pourra trouver la démonstration de ce théorème dans notre annexe.**

Il est à noter que le mathématicien grec Euclide affirma déjà en son temps grâce à une démonstration ingénieuse qu'il existait une infinité des nombres premiers.

Composition des nombres par les nombres premiers :

L'univers des mathématiques est l'univers des nombres. Et dans cet univers, on remarque que les nombres premiers ont une place importante dans la mesure où *tout nombre entier peut s'écrire de façon unique comme un produit de nombres premiers. C'est* ***le théorème fondamental de l'arithmétique.***

Par exemple, $3520 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11$, qui peut aussi s'écrire, $3520 = 2^6 \times 5 \times 11$. Comme en chimie, les atomes forment la base de toute constitution moléculaire, les nombres premiers sont la base de l'architecture des nombres, lesquels sont les piliers des mathématiques. Cette réalité confère donc aux nombres premiers une place importante dans les recherches en mathématiques supérieures.

Aujourd'hui, des nombreux mathématiciens se donnent la tache dans leurs travaux de comprendre comment apparaissent les nombres premiers, quelle logique s'applique pour qu'un nombre premier apparaisse dans la liste des nombres entiers..., en gros, la question peut se résumer en ce terme : *en partant de 1 à un entier quelconque m, si 2 est premier, c'est-à-dire, n'admet aucun autre diviseur que 1 et lui-même, quand apparaitra-t-il le prochain nombre premier après celui-ci ? ... et si 23 est premier, quand apparaitra-t-il le prochain nombre premier après lui ?*

Il existe des méthodes pour vérifier si un nombre est premier ou pas, ou, pour lister les nombres premier compris dans un intervalle bien défini. L'une des méthodes les plus réputées est le *Crible d'Eratosthène* ci-haut utilisé pour obtenir notre liste des nombres premiers compris entre 1 et 100.

---

[2] *Démonstration par l'Absurde :* **Notons P, une proposition, La démarche consiste à montrer que l'hypothèse non P (c'est-à-dire que P est fausse) mène à une contradiction logique. Ainsi P ne peut pas être fausse et doit être donc vraie.**

2. Crible d'Ératosthène[3]

2.1. Méthode

Cette méthode procède de la manière suivante pour connaître tous les nombres premiers compris entre 1 et un *(grand)* nombre entier n :

- écrire tous les entiers de 2 jusqu'à n ;
- enlever tous les multiples de 2 sauf 2 ;
- repérer le premier nombre plus grand que 2 encore présent, c'est-à-dire 3, et enlever tous les multiples de 3 sauf 3 ;
- repérer le premier nombre plus grand que 3 encore présent, c'est-à-dire 5, et enlever tous les multiples de 5 sauf 5 ;
- etc.
- s'arrêter dès qu'on a atteint et éliminer les multiple du plus grand nombre inférieur à $\sqrt{n}$;
- ce qui reste est la table des nombres premiers jusqu'à n.

2.2. Illustration de la méthode du Crible d'Eratosthène

1. Tous les nombres entiers jusqu'à 100 après élimination de 1

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Tous les nombres entiers restant après élimination de tous les multiples de 2 *(donc tous les nombres pairs dans cet intervalle excepté 2 lui-même)*

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

[3]Ératosthène fut un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec du IIIe siècle av. J.-C. (Cyrène, v. -276 – Alexandrie, Égypte, v. -194). Il élabora le crible qui porte son nom et permet de déterminer tous les nombres premiers inferieurs à un entier n.

3. Tous les nombres entiers restant après élimination de tous les multiples 3

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	
		53		55				59	
61				65		67			
71		73				77		79	
		83		85				89	
91				95		97			

4. Tous les nombres entiers après élimination de tous les multiples de 5

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73				77		79	
		83						89	
91						97			

5. Tous les nombres entiers après élimination de tous les multiples de 7

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

D'après la méthode du Crible d'Eratosthène, on s'arrête à 7 car le chiffre après 7 est 11 et 11 est supérieur à la $\sqrt{100}$ et 7 est le plus grand nombre inférieur à celle-ci. *Tous les nombres entiers restant sont donc les nombres premiers qui existent entre 1 et 100.*

Certes pour les valeurs numériques plus ou moins petites, on peut appliquer le Crible d'Eratosthène ou réfléchir mentalement pour pouvoir ensuite conclure sur la nature du nombre qu'on a, s'il est premier ou pas ou donner une liste des nombres premiers dans l'intervalle choisi. Mais cette manière de faire peut s'avérer peu efficace ou fatiguant!

Nous voulons savoir par exemple les nombres premiers entre 1 et 1000 ou peut être plus. On remarque bien qu'on s'impose dans ce cas une tache plutôt ardue et on risque bien vite de se lasser des calculs qui pourraient intervenir pour vérifier effectivement les multiples de chaque nombre etc… Une formule, c'est ce que cherchent les mathématiciens pour de manière efficace et définitive, savoir déterminer l'apparition des nombres premiers.

3. Espace entre nombres premiers

Nous allons nous donner une petite tâche : observons carrément le comportement des nombres premiers sans trop chercher à émettre des hypothèses. Attardons-nous à observer et essayer de comprendre les espaces entre eux. Ainsi, on constate que seule la différence entre 3 et 2, *le premier des nombres premiers, et le seul à être pair*, est 1, pour tous les restes, la différence entre un nombre premier noté p_i et le nombre premier p_{i-1} qui le précède est toujours un nombre pair, un multiple de 2 ou 2 lui-même, donc un élément de $2\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

La différence entre 3 et 2 est 1, *cas que l'on peut considérer comme une exception*. Pour les restes :

- La différence entre 5 et 3 est 2 ;
- La différence entre 7 et 5 est 2 ;
- La différence entre 11 et 7 est 4 ;
- La différence entre 13 et 11 est 2 ;

  …

- La différence entre 71 et 67 est 4 ;
- La différence entre 73 et 71 est 2 ;
- La différence entre 79 et 73 est 6 ;

  …

- La différence entre 97 et 89 est 8 ;

Et cela continue… Ces espaces qui s'étendent et se réduisent entre les nombres premiers sont à vrai dire le centre du problème des mathématiciens. Dans chaque intervalle, dans l'analyse des nombres premiers inferieurs à 100, 200, …, 1000 ou plus encore, on retrouve les mêmes espaces mais qui apparaissent de manière aléatoire, imprévisible et répétitif quand-même.

Dans la liste des nombres premiers compris entre 100 et 200 comme on peut le voir dans cette représentation, on peut remarquer les mêmes espacements. On constate également que d'autres multiples de 2 apparaissent comme 14 par exemple, entre 113 et 127 ou 10 entre 139 et 149.

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Hypothèse :

Pouvons-nous maintenant essayer d'émettre une hypothèse à ce sujet :

Soit un nombre premier $p_i \geq 3$, p_{i+1}est le nombre premier qui vient après p_i si et seulement si il existe un unique entier n dans $2\mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $p_{i+1} = p_i + n$.

4. Nombres premiers et applications

L'étude des nombres premiers est l'objet de la branche des mathématiques que l'on nomme l'arithmétique.

L'arithmétique fut pendant très longtemps une branche des mathématiques qui n'offrait pas des applications directes ou concrètes, jusqu'au 20ème siècle à l'invention de l'ordinateur et au développement de la technologie numérique que nous connaissons ces jours. C'est là également que l'on a pu effectivement mettre en application les nombres premiers.

Les nombres premiers jouent un rôle considérable dans la science et la technologie. Ils jouent un rôle important dans le secteur financier lors des transactions dans la sécurisation des données bancaires par exemple. En cryptographie, qui est l'étude des méthodes donnant la possibilité d'envoyer des données de manière confidentielle sur un support donné, les nombres premiers sont très utilisés. Ils permettent justement d'élaborer des codes qui assurent une sécurisation optimale des données à protéger.

Puisque les nombres sont toujours là dans toutes nos activités, et qu'ils sont eux, formés des nombres premiers par le produit, on comprend bien pourquoi il importe beaucoup aux scientifiques d'étudier les nombres premiers.

Annexe

Proposition : *Tout entier naturel $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.*

Démonstration : Soit $n \geq 2.$ Notons E l'ensemble des diviseurs de n qui sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Comme $n \in E, E$ est une partie non vide de $\mathbb{N}.$ Soit k le plus petit élément de E. Comme $k \in E$, $k|n$. Montrons que k est premier par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, k admettrait un diviseur $1 < k' < k$ et on aurait donc $k'|n$ d'où $k' \in E$ et $k' < \inf(E) = k$, ce qui est absurde.

Bibliographie

1. **Mathématiques L1,** 2ème Edition Pearson
2. **Merveilleux Nombres Premiers,** Voyage au cœur de l'arithmétique*, Jean Pierre Delahaye*
3. **Cryptographie et Sécurité Informatique,** Faculté des Sciences Appliquées, *Renaud Dumont*, Note de Cours provisoire 2009-2010,